

Eindimensionale Plasmaströmung in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern

E. REBHA

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforsch. 20 a, 1019—1026 [1965]; eingegangen am 5. Mai 1965)

An investigation was made of a steady, one-dimensional plasma flow in crossed electric and magnetic fields. The interaction between the flow and the fields causes various flow types. In general, the flow is either supersonic or subsonic in the entire channel. Under certain circumstances, however, a transsonic flow may develop. Finally, flows exist with a steady shock front, the position and strength of which depend on the magnetic field strength and the pressure at the end of the tube.

Untersucht wird die eindimensionale, stationäre Strömung eines Plasmas in Wechselwirkung mit gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern. Beiträge zu diesem Problem finden sich in einer Arbeit von RESLER und SEARS¹, die sich unter Vernachlässigung des Magnetfelds induzierter Ströme auf schwache Wechselwirkung beschränkt.

Abb. 1 gibt eine Übersicht über die Geometrie des Problems. Das Strömungsrohr hat konstanten rechteckigen Querschnitt, zwei gegenüberliegende Rohrwände sind elektrisch leitfähig und bilden ein

Spannung fällt auch zwischen den beiden Elektroden über das Plasma ab, so daß eine elektrische Feldstärke E mit in Rechnung zu setzen ist. Läßt man für diese beliebige Werte zu, so ist die Möglichkeit miteinbezogen, daß an Stelle des Widerstandes eine Batterie U_B im Außenkreis liegt.

Infolge der induzierten Ströme übt das Magnetfeld eine Kraft auf das Plasma aus. Sie liegt in Richtung der Strömung und läßt diese eindimensional. Beim Eintritt in das Magnetfeld und bei dessen Verlassen strömt das Plasma durch Streufelder, die notwendigerweise gekrümmmt sind. Deren Wirkung darf man jedoch vernachlässigen, wenn ihre Ausdehnung klein ist gegen den übrigen Feldbereich².

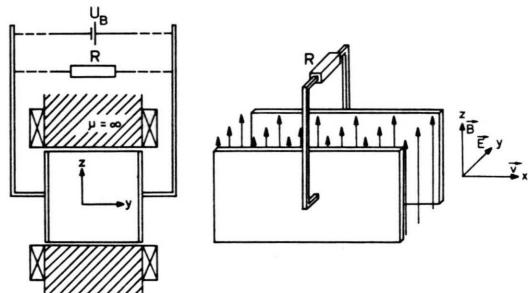


Abb. 1.

Elektrodenpaar, zwischen dem elektrische Ströme fließen können. Senkrecht zur Strömung und parallel zu den Elektroden verläuft das angelegte, homogene Magnetfeld. Es induziert im Plasma elektrische Ströme, die zu einer der Elektroden abfließen und mit einem Eigenfeld verbunden sind, das sich dem angelegten äußeren Feld überlagert. Außerhalb des Plasmas wird der Stromkreis über einen Widerstand R geschlossen. Die an ihm abfallende

I. Ansatz und Grundgleichungen

Die mathematische Behandlung erfolgt eindimensional, so, als wären seitliche Begrenzungen ins Unendliche gerückt. Alle Größen hängen somit nur von x ab, da wegen der geforderten Stationarität auch zeitliche Abhängigkeit entfällt.

Das Plasma sei quasineutral. Für sein thermodynamisches Verhalten können spezielle Ansätze fast durchwegs vermieden werden. Seine elektrische Leitfähigkeit ist endlich und hängt ab vom Druck p und der Temperatur T . Reibung und Wärmeleitung werden vernachlässigt.

Folgender Ansatz wird nahegelegt:

$$\mathbf{v} = (v(x), 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, j(x), 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B(x)), \\ \mathbf{E} = (0, E, 0), \quad E = \text{const.}$$

¹ E. L. RESLER u. W. R. SEARS, J. Aerospace Sci. 25, 235 [1958].

² E. REBHA, Eindimensionale Plasmaströmung in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern, IPP Laborbericht, Garching 1963.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Hier sind zwei Punkte noch näher auszuführen:

1. Solange die Plasmaleitfähigkeit wesentlich kleiner ist als die des Elektrodenmaterials, darf man die Elektroden als Äquipotentialflächen behandeln, d. h. $E = \text{const}$ setzen. Bei den in Plasmaströmungen bisher erreichbaren Temperaturen ist diese Bedingung erfüllt.

2. Das von außen angelegte Magnetfeld \mathbf{B}_a ist homogen und von x unabhängig. Hinzu tritt jedoch das mit \mathbf{j} verbundene Feld \mathbf{B}_j , so daß das Gesamtfeld $\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_j$ ortsabhängig wird. Obiger Ansatz (keine x - und y -Komponente von \mathbf{B}) impliziert sofort eine Randbedingung: \mathbf{B} steht senkrecht auf den Magnetpolschuhen und ist wegen $\text{div } \mathbf{B} = 0$ stetig in deren Inneres fortzusetzen. Andererseits gilt dort wegen Stromfreiheit

$$\text{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\text{d}/\text{dx}) B/\mu = 0,$$

und die x -Abhängigkeit von B ist mit dieser Gleichung nur zu vereinbaren, wenn $\mu = \infty$ ist. Die den Ansatz ergänzende Randbedingung bedeutet in praxi: Verwendung von Polschuhen mit möglichst hoher Permeabilität.

Ausdrücklich wird angemerkt, daß ohne diese Zusatzbedingung der Ansatz nicht mehr gilt. B_j kann dann auch x -Komponenten haben, und diese können an den Rändern die z -Komponente sogar überwiegen³.

Mit dem Ansatz sind folgende Gleichungen zu lösen:

a) Die Maxwellschen Gleichungen

Sie sind durch den Ansatz von selbst erfüllt, ausgenommen die Gleichung

$$\text{rot}(\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{j},$$

in der \mathbf{j} gegeben ist durch das OHMSche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Es gilt in dieser Form, solange die Gyrationsfrequenz der Elektronen klein ist gegenüber der Stoßfrequenz zwischen Elektronen und Ionen⁴.

Unter Benutzung des Ansatzes erhält man daraus

$$\mathbf{B}' = -\mu \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(E - v B). \quad (2)$$

³ J. E. McCUNE u. W. R. SEARS, J. Aerospace Sci. **27**, 139 [1960].

b) Die mechanischen und thermischen Erhaltungssätze

Die Kontinuitätsgleichung

$$\partial \varrho / \partial t + \text{div } \varrho \mathbf{v} = 0$$

liefert $(\text{d}/\text{dx}) \varrho v = 0$ oder nach Integration

$$\varrho v = F, \quad F = \text{const.} \quad (3)$$

Der Impulssatz

$$\varrho (\text{d}\mathbf{v}/\text{dt}) = -\text{grad } p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

vereinfacht sich zu

$$F(\text{d}v/\text{dx}) = -(\text{d}p/\text{dx}) + j B. \quad (4)$$

Jedem Massenelement der Strömung wird auf seiner Bahn in der Zeit $\text{dt} = (\text{dx})/v$ die JOULESche Wärme

$$\text{dq} = \frac{j^2}{\varrho \sigma} \text{dt} = \frac{j^2}{\sigma F} \text{dx}$$

zugeführt (j^2/σ zählt pro Volumen, dq pro Masse, daher der Faktor $1/\varrho$). Obwohl die OHMSche Heizung ein irreversibler Prozeß ist, gilt

$$\text{dq} = T \text{ds},$$

denn: nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist

$$\text{dq} = \text{du} - \text{dA}.$$

Setzt man darin für die Arbeitsleistung

$$\text{dA} = -p \text{d}(1/\varrho)$$

ein, so folgt

$$\text{dq} = \text{du} + p \text{d}(1/\varrho) = T \text{ds}.$$

Somit erhält der Energiesatz die Form

$$T \text{ds} = \frac{j^2}{\sigma F} \text{dx}. \quad (5)$$

(1) – (5) sind als die Grundgleichungen des vorliegenden Problems aufzufassen.

Die Entropie läßt sich aus (5) eliminieren durch die Beziehung

$$T \text{ds} = \frac{c}{\varrho} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}} \left(\frac{\text{dp}}{c^2} - \text{d}\varrho \right), \quad (6)$$

die im Anhang bewiesen wird. c ist hierin die Schallgeschwindigkeit, $\gamma = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v .

Mit (3) und (4) lassen sich daraus dp und $\text{d}\varrho$ eliminieren gemäß

$$\text{d}\varrho = -\frac{F}{v^2} \text{dv}, \quad (7)$$

$$\text{dp} = j B \text{dx} - F \text{dv}. \quad (8)$$

⁴ A. SCHLÜTER, Einführung in die Plasmaphysik, nicht veröffentlicht.

Schließlich kann man mit (2) j durch E , v und B ausdrücken. Der geschilderte Eliminationsprozeß führt zu den an Stelle von (1) bis (5) tretenden Gleichungen

$$dB/dx = \mu \sigma(vB - E), \quad (9)$$

$$F \frac{dv}{dx} = \frac{\sigma}{a c^2} \cdot \frac{v(vB - E)[(1+a)vB - E]}{1 - v^2/c^2} \quad (10)$$

mit der Abkürzung

$$a = (1/c) \sqrt{c_p T / (\gamma - 1)}.$$

Dies sind zwei Differentialgleichungen für die zwei Unbekannten $v(x)$ und $B(x)$. E und $F = \varrho v$ spielen die Rolle von Parametern, die Schallgeschwindigkeit ist abhängig von p und ϱ und ist damit eine Funktion von x . Das Temperaturverhalten der Strömung ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\gamma \sigma}{F c_p} (vB - E)^2 \quad (11)$$

$$\cdot \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{(1+a)vB - E}{(1 - v^2/c^2)(vB - E)} \right),$$

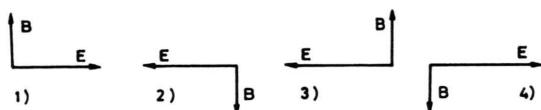
die man erhält, wenn (5), (7), (2) und (10) in die im Anhang bewiesene Beziehung

$$dT = \gamma \frac{T ds}{c_p} + \frac{(\gamma - 1)c}{c_p \varrho} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}} d\varrho$$

eingesetzt werden.

Mit (9) bis (11) läßt sich das Strömungsverhalten auf übersichtliche Weise diskutieren. Was interessiert, ist der qualitative Verlauf der Funktionen $v(x)$ und $T(x)$, und dieser ist durch Nullstellen, Vorzeichenwechsel und Unendlichkeitsstellen der Ableitungen $v'(x)$ und $T'(x)$ charakterisiert.

Abschließend einige Bemerkungen zu Vorzeichen- und zu Richtungsfragen. Überall gilt $v > 0$, $\varrho > 0$, daher auch $F > 0$. Weiterhin sind u , σ , c , c_p , γ und $\sqrt{(\gamma - 1)/(c_p T)}$ positiv, E kann sowohl positiv wie negativ sein, je nach Polung der Batterie und ob ein Widerstand im Außenkreis liegt. Zwischen E und B gibt es schließlich für einen beliebigen, aber fest gewählten Punkt in der Strömung die folgenden Orientierungsmöglichkeiten:



Durch eine 180° -Drehung gehen sowohl die beiden ersten als auch die beiden letzten Figuren ineinander über, d. h. physikalisch sind nur zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Daher bedeutet es keine Einschränkung, wenn später B in einem Punkt des Strömungsfeldes, z. B. an dessen Anfang, positiv gewählt wird, man hat sich damit nur für Fall 1) und 3) entschieden.

II. Strömungen ohne Stoßfronten

1) $E = 0$: Kurzschlußfall

Sind die Elektroden über den Außenkreis kurzgeschlossen, so fällt wegen $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$ auch über das Plasma keine Spannung ab. Dann ist $E = 0$, und aus (10) und (11) wird

$$F v' = \frac{\sigma(1+a)}{a c^2} \frac{v^3 B^2}{1 - v^2/c^2}, \quad (10')$$

$$T' = \frac{\gamma \sigma}{F c_p} v^2 B^2 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1+a}{1 - v^2/c^2} \right). \quad (11')$$

Unter den Lösungen befindet sich natürlich auch der Fall völlig unbehinderter Strömung mit $v = \text{const}$, $B \equiv 0$. In Strömungen mit angelegtem Feld kann dann aus Gründen der Eindeutigkeit nirgends $B = 0$ werden, was nach (10') bedeutet, daß v' keine Nullstellen hat.

Weiter folgt aus (10'): im Unterschallbereich ($v < c$) ist v' positiv, geht mit $v \rightarrow c$ gegen $+\infty$ und wechselt beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit das Vorzeichen. Im Überschallbereich ($v > c$) ist v' negativ.

In Tab. 1 sind diese Aussagen nochmals zusammengestellt. Abb. 2 zeigt den daraus folgenden Verlauf der Lösungen.

	$1 - \frac{v^2}{c^2}$	T'	v'	
$v < 0$	+	*	+	$v' \rightarrow +\infty$ mit $v \rightarrow c$
$v > 0$	-	+	-	$v' \rightarrow -\infty$ mit $v \rightarrow c$

+ = positiv, - = negativ,

* Minuszeichen für $[1 - [(\gamma - 1)/\gamma](1 + a^2)]^{1/2} c < v < c$, Pluszeichen für $v < [1 - [(\gamma - 1)/\gamma](1 + a^2)]^{1/2} c$. [Dies folgt aus (11') für $\gamma > 1$.]

Tab. 1.

Der erhaltene Lösungsbogen ist außer bei $v = c$ für alle x doppeldeutig, physikalisch sinnvoll sind daher nur seine beiden Äste $v < c$ und $v > c$, die beide bei $v = c$ abbrechen. Als Lösung ergibt sich also entweder eine reine Überschall- oder eine reine Unterschallströmung.

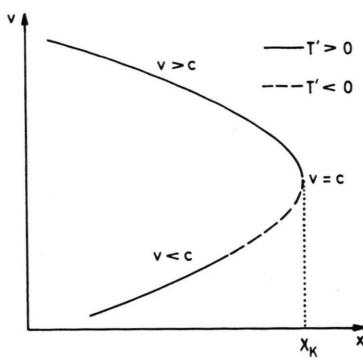


Abb. 2.

Was aber bedeutet das Abbrechen der Lösungen mit $v = c$? Offensichtlich gibt es keine für den gesamten Strömungskanal gültige Lösung, wenn dessen Ende rechts von x_K liegt. Das heißt aber, daß eine stationäre Strömung dann nicht existiert. Es bleibt zu bemerken, daß die Lage von x_K natürlich von den Anfangswerten von p , ϱ und v abhängt.

2) $E < 0$: Strömung mit Energiezufuhr

Nach Abschnitt I kann man am Anfang des Strömungsfeldes $B > 0$ setzen. Gl. (9) zeigt, daß dann B zunimmt und daher B , $vB - E$ und B' überall positiv sind. Das gleiche gilt nach (1) für jE , d. h. der Strömung wird auf ihrem ganzen Weg Energie zugeführt. Mit $B > 0$ gilt auch

$$(1+a)vB - E > vB - E > 0$$

und analog zu Tab. 1 erhält man Tab. 2. Die Strömung verläuft qualitativ wie im Kurzschlußfall Abb. 2.

	$1 - v^2/c^2$	$vB - E$	$(1+a)vB - E$	T'	v'	
$v < c$	+	+	+	*	+	$v' \rightarrow +\infty$ mit $v \rightarrow c$
$v > c$	-	+	+	-	+	$v' \rightarrow -\infty$ mit $v \rightarrow c$

* Minus für $\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{(1+a)vB - E}{vB - E}\right)^{\frac{1}{2}}$ $c < v < c$, für kleinere v Plus. [Dies folgt aus (11).]

Tab. 2.

3) $E > 0$, $vB - E > 0$: Generator

Unter den angegebenen Bedingungen ist $jE < 0$, d. h. im ganzen Strömungsfeld wird Energie entzogen und einem Verbraucher R im Außenkreis zugeführt.

Der Grenzfall $R = 0$ (entsprechend $E = 0$) wurde unter 1) behandelt. Der andere Grenzfall $R = \infty$ (Leerlauf) entspricht einer Strömung konstanter Geschwindigkeit mit $vB - E = 0$, bei der die EMK des Magnetfelds durch das elektrische Feld kompensiert wird.

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen ist entweder $vB \equiv E$ oder überall $vB \neq E$. In dem jetzt untersuchten Fall ist daher $vB - E$ stets positiv, kann allerdings asymptotisch gegen Null gehen. Diese Möglichkeit besteht jedoch nur für Überschallströmungen, da im Unterschallgebiet nach (9) und (10) v und B beide zunehmen. Daneben besteht für Überschallströmungen natürlich auch weiterhin die Möglichkeit, mit $v' = -\infty$ bei $v = c$ abzubrechen.

Wie früher kommt man zu Tab. 3 und Abb. 3.

	$vB - E$	$(1+a)vB - E$	$1 - v^2/c^2$	v'	T'	
$v < c$	+	+	+	*	+	$v' \rightarrow +\infty$ mit $v \rightarrow c$
$v > c$	+	+	-	-	+	$v' \rightarrow -\infty$ mit $v \rightarrow c$

* Wie unter * bei Tabelle 2.

Tab. 3.

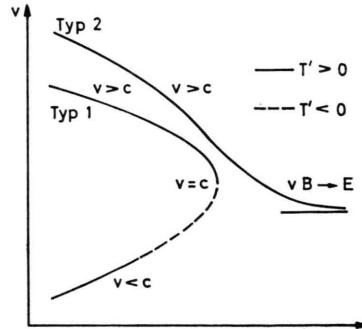


Abb. 3.

4) $E > 0$, $vB - E < 0$: Strömung mit Energiezufuhr

B sei am Anfang des Strömungsfeldes wieder positiv, zusätzlich sei dort auch

$$(1+a)vB - E > 0.$$

Bei Unterschall nehmen nach (9) und (10) dann zunächst v und B , daher auch vB ab. Dies geschieht so lange, bis $(1+a)vB - E = 0$ und damit $v' = 0$.

wird. Im gleichen Punkt gilt:

$$(vB)' = vB' = \mu\sigma v(vB - E) < 0,$$

daher geht $(1+a)vB - E$ anschließend zu negativen Werten über, während v' nach (10) positiv wird. v nimmt jetzt zu, und im weiteren Verlauf kann auch $(1+a)vB - E$ zu wachsenden Werten umkehren. Der Wert Null kann aber nicht nochmals erreicht werden, da dies nur bei fallendem vB [d. h. $(vB)' < 0$], also nur von positiven Werten her möglich ist. Erst recht bleibt $vB - E$ negativ, und $v(x)$ strebt bei wachsender Steigung gegen die Schallgeschwindigkeit.

Im Überschallbereich sind zunächst B' negativ und v' positiv. Liegt v nahe bei c , so ist v' sehr groß und $(vB)' = v'B + vB'$ sicher positiv. Entweder geht nun $vB \rightarrow E$ und die Strömung asymptotisch gegen den unter 3) beschriebenen Grenzfall $R = \infty$, oder aber $(vB)'$ wird immer kleiner und schließlich negativ. Dann nimmt vB ab, und v' wird zusammen mit $(1+a)vB - E$ Null und negativ. $v(x)$ durchläuft dabei ein Maximum, um schließlich mit $v' = -\infty$ bei der Schallgeschwindigkeit abzubrechen.

Tab. 4 und Abb. 4 geben den Überblick über die herrschenden Verhältnisse; der Temperaturverlauf wurde wieder mit (11) bestimmt.

		$1 - v^2/c^2$	$vB - E$	$(1+a)vB - E$	
$v < c$		$+ - + - +$	$\{ v' \rightarrow 0$	$\{ (1+a)vB - E \rightarrow 0$	
		$+ - - + *$	$\{ v' \rightarrow \infty$	$\{ v \rightarrow c$	
$v > c$	Typ 1	$- - + + -$	$\{ v' \rightarrow 0$	$\{ vB - E \rightarrow 0$	asympt.)
	Typ 2	$\{ - - + + **$	$\{ v' \rightarrow 0$	$\{ (1+a)vB - E \rightarrow 0$	
		$- - - - +$	$\{ v' \rightarrow -\infty$	$\{ v \rightarrow c$	

* Wie unter * bei Tabelle 2.

** Minus, solange v nahe c ; Plus in der Nähe von $(1+a)vB - E = 0$.

Tab. 4.

Bemerkenswert ist, daß jetzt auch Überschallströmungen beschleunigt werden, und daß dies unter besonderen Bedingungen sogar bei zunehmender Temperatur geschieht (Typ 2 kurz vor dem Wendepunkt).

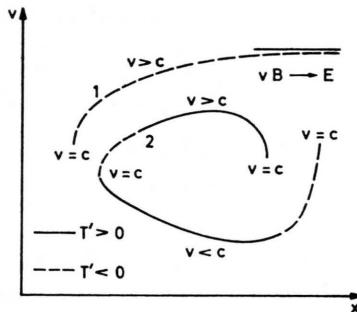


Abb. 4.

Anmerkung:

In den beiden letzten Abschnitten ergaben sich je zwei Typen von Überschallströmungen. Dabei war nicht unmittelbar zu entscheiden, welcher Typ sich aus gegebenen Anfangswerten entwickeln würde. Bei praktischen Anwendungen geht man daher besser von geeigneten Zwischen- oder Endwerten aus, die den Typ charakterisieren, und berechnet nach rückwärts die zugehörigen Anfangswerte. (Beispiel: um den Überschallast 2 von Ab. 4 zu erhalten, beginnt man mit $v > c$ und $(1+a)vB - E = 0$.) Damit ist zugleich der Beweis erbracht, daß auch wirklich beide Möglichkeiten existieren.

5) Durchschreiten der Schallgeschwindigkeit

Die bisher betrachteten Lösungen brechen alle ab, wenn $v = c$ wird, liegen also entweder ganz im Überschall- oder ganz im Unterschallbereich. Dabei wurde stillschweigend die Annahme gemacht, daß nicht gleichzeitig Zähler und Nenner von (10) verschwinden. Gerade diese Möglichkeit soll jetzt untersucht werden, und es wird sich zeigen, daß v die Schallgeschwindigkeit auch durchschreiten kann.

Es ist für das Folgende einfacher und übersichtlicher, wenn auch im Prinzip nicht notwendig, die Beziehungen

$$c^2 = \frac{5}{3} \frac{p}{\varrho}, \quad c_p = 5 \frac{k}{m_0}, \quad \gamma = \frac{5}{3}, \quad \frac{p}{\varrho} = \frac{2kT}{m_0}$$

zu benutzen, die bei vollständiger Ionisation gelten⁵. Mit ihnen wird aus (10)

$$F v' = \frac{2}{3} \frac{\sigma v(vB - E)(\frac{5}{3}vB - E)}{c^2(1 - v^2/c^2)}. \quad (12)$$

Wie man sieht, gibt es für das gleichzeitige Verschwinden von Zähler und Nenner zwei Möglichkeiten.

⁵ W. FINKELBURG u. H. MAECKER, Elektrische Bögen und thermisches Plasma, im Handbuch der Physik, Bd. 22, Verlag Springer, Berlin 1956.

Bei der ersten wird im „kritischen Punkt“ x_K

$$v_K^2 = c_K^2 = \frac{5}{3} p_K / \rho_K \quad \text{bzw. mit } \rho_K v_K = F$$

$$v_K = \frac{5}{3} p_K / F \quad (13)$$

und gleichzeitig $E = \frac{5}{2} v_K B_K$ bzw. mit (13)

$$E = \frac{25}{6} p_K B_K / F. \quad (14)$$

v_K' , d. h. $v'(x)$ genommen an der Stelle x_K , wird ein unbestimmter Ausdruck der Form $0/0$ und kann nach der Regel von d'HOSPITAL berechnet werden, indem man die beiden zu Null werdenden Faktoren in Zähler und Nenner differenziert.

Mit (9), (13) und (14) erhält man:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{5}{2} v B - E \right) \right]_{x_K} &= \frac{5}{2} (v_K' B_K + v_K B_K') \\ &= \frac{5}{2} (v_K' B_K - \frac{25 \mu \sigma_K p_K^2 B_K}{6 F^2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Mit $c^2 = \frac{5}{3} p / \rho = \frac{5}{3} p v / F$ wird

$$\frac{d}{dx} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -\frac{3}{5} F \frac{d}{dx} \frac{v}{p} = \frac{3 F (v p' - p v')}{5 p^2},$$

und nach (4), (2), (13) und (14) ergibt sich

$$\left[\frac{d}{dx} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right]_{x_K} = \frac{5 \sigma_K B_K^2}{2 F} - \frac{8 F v_K'}{5 p_K}. \quad (16)$$

Nach der d'HOSPITALSchen Regel ist dann

$$F v_K' = \left[\frac{2 \sigma v (v B - E)}{c^2} \cdot \frac{(d/dx)(\frac{5}{2} v B - E)}{(d/dx)(1 - v^2/c^2)} \right]_{x_K}$$

was nach Einsetzen von (13) – (16) und nach einigen Umformungen die quadratische Gleichung

$$v_K'^2 + \frac{25 \sigma_K p_K B_K^2}{8 F^2} v_K' = \frac{625 \mu \sigma_K^2 p_K^2 B_K^2}{96 F^4}$$

für v_K' liefert. Ihre Lösung

$$v_K' = \sigma_K p_K (\frac{5}{4} B_K / F)^2 [1 \pm \sqrt{1 - (\frac{4}{3} p_K) / (B_K^2 / 2 \mu)}] \quad (17)$$

ist nur reell, solange

$$\frac{4}{3} p_K \leq B_K^2 / 2 \mu \quad (18)$$

ist. (18) ist Existenzbedingung für den hier untersuchten Lösungstyp, denn wenn (18) nicht gilt, gibt es in der Umgebung von x_K keine Strömungswerte, die sich mit den durch (13) und (14) in x_K festgelegten Strömungswerten zu einer Lösung verknüpfen lassen.

Um jetzt den Strömungsverlauf in der Umgebung von x_K zu untersuchen, wird noch

$$(v B)_K' = v_K' B_K + v_K B_K'$$

berechnet. Mit (9), (13), (14) und (17) ergibt sich:

$$(v B)_K' = \sigma_K p_K B_K (\frac{5}{4} B_K / F)^2 \quad (19)$$

$$\cdot [1 - (\frac{4}{3} p_K) / (B_K^2 / 2 \mu) \pm \sqrt{1 - (\frac{4}{3} p_K) / (B_K^2 / 2 \mu)}].$$

In (17) und (18) gilt gemeinsam entweder + oder -. Für + sind v_K' und $(v B)_K'$ positiv, für - ist v_K' positiv, $(v B)_K'$ jedoch negativ. Nach (18) und wegen $q \leq \sqrt{q}$ für $q \leq 1$ gilt nämlich

$$1 - (\frac{4}{3} p_K) / (B_K^2 / 2 \mu) \leq \sqrt{1 - (\frac{4}{3} p_K) / (B_K^2 / 2 \mu)} \leq 1.$$

Da v' in x_K positiv ist, gilt dies auch in einer geeigneten Umgebung von x_K . Im Falle des +-Zeichens wächst $\frac{5}{2} v B - E$ mit $v B$ in Strömungsrichtung, ist also vor x_K negativ, in x_K Null und nach x_K positiv. Im Falle des Minuszeichens gilt die umgekehrte Reihenfolge. In beiden Fällen gilt um x_K herum $v B - E < 0$. Durch (12) ist schließlich das Vorzeichen von $1 - v^2/c^2$ festgelegt: es ist umgekehrt wie dasjenige von $\frac{5}{2} v B - E$, da $v B - E$ negativ ist, die rechte Seite von (12) jedoch wie $F v'$ positiv sein muß. Man erhält so Tab. 5.

	v'	$v B - E$	$\frac{5}{2} v B - E$	$1 - v^2/c^2$
$x - \Delta x$	+	-	±	±
$x + \Delta x$	+	-	±	±

Tab. 5.

Gilt das obere Vorzeichen, so geht die Strömung von Überschall zu Unterschall, obwohl sie beschleunigt wird ($v' > 0$): die Schallgeschwindigkeit wächst also schneller als die Strömungsgeschwindigkeit. Dies ist in Abb. 5 a dargestellt, wo die lokale Schallgeschwindigkeit als gestrichelte Kurve eingetragen ist. Im Falle des unteren Vorzeichens erfolgt eine Beschleunigung von Unterschall- auf Überschallgeschwindigkeit (Abb. 5 b). Da dies auch das wesent-

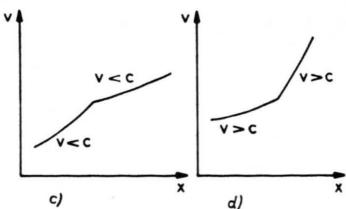
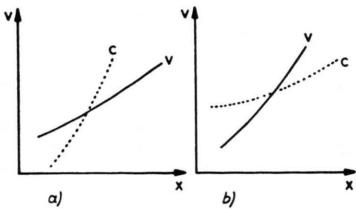


Abb. 5.

liche Merkmal der Laval-Düsen ist, könnte man hier von einer „elektromagnetischen Laval-Düse“ sprechen mit der Besonderheit, daß der Rohrquerschnitt der Düse konstant bleibt.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, daß v' in x_K zwischen seinen beiden möglichen Werten springt. Die Strömung beginnt dann entweder mit dem Unterschallast von 5 b und geht in x_K auf den Unterschallast von 5 a über (Abb. 5 c), oder der Überschallast von 5 a bildet den Anfang, und der Übergang erfolgt auf den Überschallast von 5 b (Abb. 5 d). Abb. 5 c lässt sich nach den Ergebnissen des nächsten Abschnitts als Grenzfall eines unendlich schwachen Verdichtungsstoßes interpretieren; ein vom Überschallast der Abb. 5 b ausgehender Stoß ist nach links bis in den Punkt x_K der Schalldurchschreitung gerückt. Abb. 5 d würde dementsprechend den Grenzfall eines Verdünnungsstoßes darstellen.

Wie schon erwähnt, kann in (12) auch $vB - E$ gleichzeitig mit $1 - v^2/c^2$ zu Null werden. Die Behandlung dieses Falles erfolgt ganz analog. Man erhält

$$v_K' = -\frac{5}{8}\sigma_K p_K B_K^2/F^2,$$

$$(vB)_K' = -\frac{5}{8}\sigma_K p_K B_K^3/F^2$$

und daraus Tab. 6 mit Abb. 6.

	v'	$\frac{5}{8}vB - E$	$vB - E$	$1 - v^2/c^2$
$x - \Delta x$	-	+	+	-
$x + \Delta x$	-	+	-	+

Tab. 6.

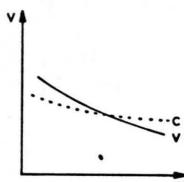


Abb. 6.

III. Strömung mit stehenden Stoßfronten

Die bisherigen Untersuchungen führten mathematisch zum großen Teil auf doppeldeutige Lösungsbögen. Entsprechend der Konstruktion aus Erhaltungssätzen ist zwischen je zwei Punkten eines solchen Bogens die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie gewährleistet. Nun erzeugt jede Lösung durch Translation in x -Richtung eine ganze Schar weiterer Lösungen (Grund dafür ist die Trans-

lationsinvarianz der Grundgleichungen bezüglich x), und die Erhaltungssätze gelten auch zwischen Punkten auf verschiedenen Bögen derselben Schar, insbesondere dann, wenn einer der Punkte auf einem Überschallast, der andere auf einem Unterschallast liegt. Dies gibt die Möglichkeit, unter Einbezug stehender Stoßfronten weitere Lösungen zu finden: die Strömung folgt in ihrem ersten Teil einem Überschallast und springt am Stoßort auf einen Unterschallast derselben Schar.

Nach dem oben Gesagten sind bei allen Stoßübergängen dieser Art die dafür zufordernden mechanischen und thermischen Erhaltungssätze erfüllt. Die Sprungbedingungen für die elektromagnetischen Felder bestimmen die genaue Lage der Stoßfront. Richtiger handelt es sich hier gar nicht um Sprungbedingungen, sondern E und B müssen beide stetig durch die Stoßfront gehen. Für E folgt diese Bedingung aus $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ und ist mit dem Ansatz $E = \text{const}$ von selbst erfüllt. Da die Plasmaleitfähigkeit endlich ist, kann auch B nicht springen, denn dies würde unendliche Stromdichte in der Stoßfront bedeuten.

Da $B' = \mu \sigma(vB - E)$ auf den Überschallästen der Schar andere Werte hat als auf den Unterschallästen, wird dort auch B unterschiedlich verlaufen, muß jedoch in deren Berührungs punkten, also bei $v = c$, zum gleichen Endwert B_K führen. Greift man aus der Schar einen Überschallast und einen Unterschallast heraus und trägt die zugehörigen Kurven für das Magnetfeld auf, so liefert deren Schnittpunkt den Ort der Stoßfront. In Abb. 7 ist dies für ver-

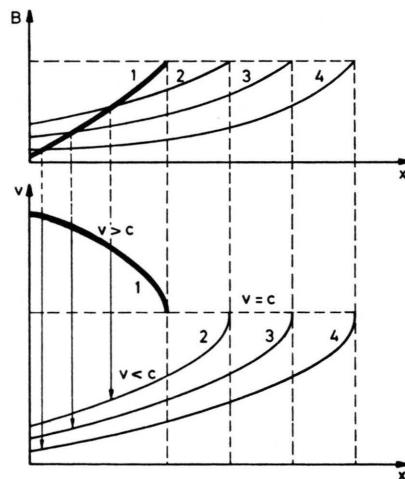


Abb. 7.

schiedene Unterschalläste dargestellt. Dabei wurde der Fall gewählt, daß das Magnetfeld auf diesen flacher als auf dem Überschallast verläuft. Es ergeben sich nur Stoßübergänge zu Unterschallästen, die rechts vom Überschallast enden. Bei umgekehrtem Magnetfeldverlauf müßten die Unterschalläste links von jenem liegen.

Physikalisch muß das Strömungsrohr spätestens dort enden, wo die Strömung Schallgeschwindigkeit erreicht. Den verschiedenen Stoßsorten entsprechen dann verschiedene Austrittsgeschwindigkeiten und Absaugdrucke am Rohrende. Durch Veränderung des Absaugdruckes läßt sich also die Lage der Stoßfront verschieben, und den gleichen Effekt hat bei festem Absaugdruck eine Veränderung des Magnetfelds. Entstehen kann eine ortsfeste Stoßfront dadurch, daß bei einer stationären, stoßfreien Überschallströmung der Absaugdruck plötzlich erhöht wird. Dann bildet sich am Rohrende eine Stoßwelle, die unter passenden Umständen in das Rohr ein dringt und dort die Bedingungen für einen stationären Aufenthalt vorfindet.

Die Arbeit wurde angeregt durch die Herren Prof. Dr. A. SCHLÜTER und Prof. Dr. R. WIENECKE. Ihnen sowie den Herren Dr. McCUNE und Dr. v. HAGENOW danke ich für wertvolle Hinweise und zahlreiche klärende Diskussionen.

Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Anhang

Thermodynamische Umformungen zu Abschnitt II

Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} c_p &= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial \varrho} \right)_p \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p, \\ c_v &= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v, \\ c^2 &= \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s = - \left(\frac{\partial s}{\partial \varrho} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_v, \\ c_p - c_v &= - \frac{T}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p. \end{aligned}$$

Die drei ersten sind Definitionen, verknüpft mit Umformungen der partiellen Ableitungen, die letzte ist eine Folgerung aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Eliminiert man hieraus $(\partial \varrho / \partial T)_p$, $(\partial p / \partial T)_v$, löst die verbleibenden Gleichungen nach $(\partial s / \partial p)_v$, $(\partial s / \partial \varrho)_p$ auf und setzt das Ergebnis in

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial s}{\partial \varrho} \right)_p d\varrho,$$

so erhält man mit $\gamma = c_p / c_v$

$$T ds = \frac{c}{\varrho} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}} \left(\frac{dp}{c^2} - d\varrho \right). \quad (20)$$

(Das Vorzeichen der Wurzel wurde so gewählt, daß $(\partial s / \partial p)_v$ positiv ist.)

Eliminiert man umgekehrt $(\partial s / \partial p)_v$, $(\partial s / \partial \varrho)_p$ und löst nach $(\partial p / \partial T)_v$, $(\partial \varrho / \partial T)_p$ auf, so erhält man mit

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_p d\varrho + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp$$

und mit

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_p = 1 / \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p \text{ bzw. } \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v = 1 / \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

das Ergebnis

$$dT = \frac{\gamma c}{\varrho c_p} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}} \left(\frac{dp}{c^2} - \frac{d\varrho}{\gamma} \right) \quad (21)$$

oder mit (20)

$$dT = \frac{\gamma T ds}{c_p} + \frac{(\gamma-1) c}{\varrho c_p} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}} d\varrho. \quad (22)$$